地震予知のための地下水水質変化データ時系列分析としてのBox-Jenkins法

小 鯛 桂 一（環境地質部）
Keiichi KODAI

1. はじめに

地震による地下水水質の挙動が時間的に変化する統計的性質をもつならば 地下水の長期的・連続的サンプリング観測が不可欠であり これの時系列分析も必要となってくる.

時系列分析とは 標本データから母集団構造を知るために時間的統計分析を行うことであり 具体的には観測データの集合を用いてデータ発生機構を知ることと その結果を用いてある予測を行うことである. このデータ中にはシステマチックとランダム（ある事象が前後の事象と独立していること）の二つの要素を一般に含む.

古典的時系列はシステマチックなパターンにランダムな攪乱要因が加ったものとされ ランダム部分は時間的に本質的な係りをもたなかった. これに対して Box-Jenkins (1970) を中心に発達した近代時系列の解釈は時系列を構成する第2要素であるランダムな変動部分の時間的相関関係の分析に重点を置くようになった. 特に地震による地下水挙動に関係する変化は独立的でランダムなためにこの近代確率理論は地震予知のための地下水水質変化時系列分析法として適合する.

2. 定常時系列とその性質

2.1 定常性とエルゴード性について

定常性は時系列から母集団を推定するのに必要な条件である. しかしこれは最小限の仮定にすぎず 定常性であってもエルゴード性がなければ推定不能となる. エルゴードの数学的定義は省くが 基本的には十分遠い観測量で相関性を失うことを要求している. したがって 正弦曲線のように完全な周期性をもつ確率過程はこれを満さない. しかし 定常性を満す普通の確率過程はこれを満すものと考えてさしつかえないようである.

2.2 自己相関係数とコレログラム

自己相関係数は時系列データ分析用の内部的相関係数であり 自己共分散を分散係数で除したものである. これはもしなんらかの周期変動があれば ある時間間隔（項数）で高い相関が系列中に認められるとする仮定にもとづいているため ランダムデータ中の周期成分を検出する手段として有効である. なお この時差をプロットした図がコレログラムである. コレログラムは時系列の内部構造の時間的変化を明らかにできる他 長期持続性の指針にもなる.

3. 自己回帰移動平均（ARMA）モデル

時系列理論における過程（時間・線・面・容積的な連続変化を示す現象）には 自己回帰（AR） 移動平均（MA）と自己回帰移動平均（ARMA）の三つの型がある.

ある時系列Zを考え 時刻tにおける式はそれぞれ次のようになる.

AR; $\phi(B)Z_t=a_t$, MA; $Z_t=\theta(B)a_t$,

ARMA; $\phi(B)Z_t=\theta(B)a_t$

ここに Bは後進演算子 $\phi(B)$はp次の自己回帰演算子 $\theta(B)$はq次の移動演算子 そしてa_tはホワイトノイズである.

一般にMAモデルはその特性方程式の根の絶対値がすべて1よりも大きければ無限次数のARモデルと対応する. Box and Jenkins はこのことから 一定条件のもとでの無限次数または高次のMA（またはAR）モデルが比較的低次のAR（またはMA）モデルに近似できることを直感し ARMA モデルを生みだした. ARMA モデルはARとMAを組合せることで好しくない高次のAR（またはMA）モデルは低次のMA（またはAR）に代替でき次数を節約できるという“ケチの原理”がはたらいている. このように 節約型であるにもかかわらず広範囲の時系列を表現できる利点をもっている. なお ARMA (2.0) モデルは地下水系の入・出力過程を記すのに十分であるとする報告もある.

4. ARMA モデルの拡張

4.1 非定常性について

日 週 月 四季 年の各変化のような周期性変化は決定論的成分であるが 時系列にはこれ以外に非定常な確率成分をも含んでいる. 水文時系列は一般に年周期が卓越（特に降水量が関係するとき顕著）した持続性（例え

ばレベルや勾配が時間と共に変化するような時間的持続性）をもつが　ときには非定常さらには離散的となる．　したがって　時系列の時間的独立の仮定あるいは分布の対称性の仮定にもとづく通常のノンパラメトリックな統計手法は有効でないとされている．

時系列中の非定常には　時系列を生む物理的過程から自然または人為的の統計性質変化を通じて生じるもの（地震などの瞬間的または短時間の大変動もこの範疇に入る）と　測定技術上のエラーとがある．

4.2 自己回帰和分移動平均（ARIMA）モデル

前述のように　ARMA モデルによる時系列分析は定常過程を前提としているので　非定常時系列を分析するためにはこの時系列の階差（d）をとって定常化させる（概定常化という）操作が必要になる．　すなわち ARIMA（p，d，q）モデルは　この操作を含む．　この場合の次数も過程が周期性をもつ以外2を越えることは稀である．　実際のモデル分析においては　（1，d，0）（0，d，1）（2，d，0）（0，d，0）または（1，d，1）のいずれかの範囲での次数選択がなされる．

なお　季節性のある時系列にはこの季節性を考慮した自己回帰和分移動平均（SARIMA）モデルが用いられる．

このモデルは季節性が保存されても年単位以上の長期変動特性は保存されないので　長期動特性をみる場合には他の方法で補う必要がある．

5. 同定　推定　診断　と予測

実際データから時系列を作成する際には正しいモデルと正しい次数が未知なので　これらを推定する必要がある．　このことから　Box-Jenkins 法による時系列モデルの作成手順は他の定量分析と同様に次の四つの段階を経る．〔仮モデル設定とその同定〕――〔最尤法等によるモデルの推定〕――〔検証・診断〕――〔予測〕．

仮に設定したモデルは　自己相関係数（a，c，f）偏自己相関係数（p，a，c，f）や逆偏自己相関係数（i，p，a，c，f）などそれぞれのコレログラムの次数別の相関性や周期性を視覚的にとらえ　背後にある意味を探りながらいずれのモデルが適合するかを識別し　一つのモデルを選択する（これを同定という）．この選択されたモデルは最尤法やユールウォーカー法を用いて推定が行われる．　そして二つの推定結果を用いて残差を算出しその系列の自己相関性からモデルの攪乱項が系列的に独立しているか否かを検定し　モデル適合度を診断（残差の分散度で判定）する．　もし同定で選択されたモデルが正しければ診断された攪乱項は時系列的に独立するはずである．

Box-Jenkins 法の欠点の一つは識別段階で多くの時間と技術を要することである．　したがってこれを補う意味での検定・診断に代る方法として赤池情報量基準（AIC）が考えられている．　これは対象とするモデルを自動的に計算し区別（最小値を選ぶ）する一つの基準式である．

6. 干渉（intervention）分析とその地震動への利用

時系列はその平均レベル中の自然または人為的なある特別な期間にだけ　またはこの時点を境にしてジャンプ（またはステップ）状の変化を生じることがある．　干渉分析とはこのような平均値レベルの急激な変化を動的モデル（Box-Jenkins 変換関数モデルの特別ケース）で表わし有意な平均値変化を荒く見積るための技術である．　この分析モデルはシミュレーションや予測に利用できる．すなわち　地震動前後の変化を統計的に表わせる他　気候の顕著な変化をチェックし予測するのにも有効といわれている．

干渉モデルの応答は動的部分とノイズ部分（無相関ランダム変数）の両成分からなる．　そして ARIMA 過程は季節的と非季節的両方のノイズ項を構成する．　数学的には次の一般形で表わせる．

$$y_t = f(\underline{k}, \xi, x, t) + N_t$$

ここに $y_t = F(Y_t)$ は Y_t の Box-Cox 変換（例えば $y_t = \log_e Y_t$　$y_t = Y_t^{-1/x}$）$f(\underline{k}, \xi, x, t)$ はモデルの動的部分で干渉部分　決定論入力　と時間影響を含む．　k は未知パラメータのセット　ξ は干渉時系列のセット　x は決定論的入力系列のセット　そして Nt は確率ノイズ成分である．

実際の干渉問題が生じるとき　問題を理解するのに考えられる干渉影響をうまくモデル化することが大切である．

文　献

Box, G. E. P. and Jenkins, G. M (1970) Time series analysis: Holden-Day Inc. San Francisco, Calif.

Box, G. E. P. and Tiao, G. C. (1975) Intervention analysis with applications to economic and environmental problems: J. Am. Stat. Assoc. vol. 70, p. 70-79.

Hipel, K. W., Lennox, W. C., Unny, T. F., and McLeod, A. I. (1975) Intervention analysis in water resourses: Water Resources Res., vol. 11, No. 6, p. 855-861.

Hipel, K. W., Mcleod, A. I., and Lenuox, W. C. (1977) Advances in Box-Jenkin modeling (Ⅰ&Ⅱ): Water Resources Res., vol. 13, No. 3, p. 567-586

その他