

楕円体クラックを含む異方性岩石での実効弾性定数の 一般的数値計算法

西澤 修* 吉野 隆**

NISHIZAWA, Osamu and YOSHINO, Takashi (1991) A numerical method for calculating effective elastic constants of anisotropic material containing elliptical cracks. *Bull. Geol. Surv. Japan*, vol. 42 (10), p. 517-526, 1 fig., 4 tab.

Abstract : Using a numerical approach, we tried to calculate Eshelby's tensor of ellipsoidal inclusions in an anisotropic matrix material. This allows us to obtain effective elastic constants of the material containing ellipsoidal cracks, free from the restrictions that the matrix material is of isotropy, or of cubic or hexagonal anisotropy in which the symmetry axis is parallel to the unique axis of the spheroidal crack. To examine the accuracy of this numerical method, we compared the numerical results for isotropic material with analytical solutions. The results suggest that we can obtain elastic constants of the cracked solid with adequate accuracy (within a few percent) only when the shapes of cracks are close to the sphere : for aspect ratios (the ratio of the minor and the major axis of an oblate spheroid) smaller than 0.05, present numerical method provides unreasonable values. We also calculated the effective elastic constants of the material containing spherical cracks in a matrix material having orthorhombic elastic symmetry.

要 旨

Eshelby のテンソルはクラックを含む岩石の弾性定数を計算するのに必要なパラメタである。これまで、この値は媒質が等方性のものか、偏平回転楕円体で近似したクラックの主軸が、立方晶または六方晶の対称軸と一致したときのみ計算が可能であった。ここでは、上記の制限を取り除き、一般的な場合における Eshelby テンソルの数値計算を試みた。これが可能ならばクラックを含む岩石の弾性定数計算の応用範囲は広がる。計算の精度を確かめるために、等方性媒質についての計算結果を、解析解から求められた結果と比較した。今回用いた方法では、クラックが偏平な場合に精度が上がらないことが明らかになった(回転楕円体の短軸と長軸との比—アスペクト比—が 0.05 以下では合理的な結果は得られない)。応用の一例として、斜方晶の媒質中に球形の空隙が少量存在する場合についての弾性定数の計算を試みた。

1. はじめに

岩石中に存在する小さな空隙が岩石の物性に影響をおよぼすことはよく知られている。これらの空隙は互いに

つながってネットワークを形成し、内部に水などの流体を含むため、岩石の力学的性質だけでなく、電気伝導度や水・油の流動といった輸送現象をも支配する。岩石の物性は空隙の量だけでなく、その形態にも関係している。とくに力学的性質は、空隙の形状との関係が深い。空隙の形状は球から偏平なものまで、さまざまのものがあり、Crampin (1991) では偏平な空隙をクラック、球に近いものをバブル (bubble) と呼んでいる。岩石の中の面状に広がった大きな割れ目はジョイントと呼ばれるが、ここでも凹凸を持った面のランダムな接触によって、空隙が形成される。岩石にはこのように各種の空隙が存在するが、以下ではすべての空隙を総称してクラックと呼ぶことにする。しかし、形態を偏平な楕円体のみ限定するものではない。

岩石の弾性波速度は地殻の物性を表すために最もよく用いられるパラメタであるが、クラックの影響を強く受ける。最近多くの人々が興味を持っているのは地殻の弾性的異方性である。通常クラックは球から隔たった非等方的形状であるため、クラックを含む岩石の弾性的性質は異方性を持つ。弾性波速度は伝播方向によって異なり、

Keywords: Eshelby's tensor, crack, elastic constants, composite material

* 地殻熱部 ** 筑波大学・物理工学系

横波(S波)では波の振動方向によって伝播速度が異なる現象—S波スプリッティング—が観測される。S波スプリッティングは自然地震の分野では以前から研究されていたが(Gupta, 1973; Crampin, 1978, 1984; Crampin and McGonigle, 1981など)、最近ではVSPなどでも関心が高まっている(Li *et al.*, 1990; Douma and Crampin, 1990)。Crampinと彼の共同研究者は、彼らの多くの論文の中で、クラックに起因する弾性的異方性とS波スプリッティングについての研究が、地球物理や物理探査の分野でいかに重要であるかを指摘してきた(Crampin, 1978, 1987; Crampin and Atkinson, 1985; Leary *et al.*, 1990など)。これらの主張の根拠となっているのは、クラックを含む岩石の弾性波速度のモデル計算である。この種の計算では、クラックを含まない状態での岩石本来の弾性定数を初期パラメータとして、クラックに適当な形態、配列方向、密度を与え、クラックを含む物質の実効的な弾性定数を計算する。もし観測データを合理的に説明するクラックの形状、配列方向、密度が得られれば地殻内部のクラックの存在形態を知ることができる。

クラックを含む岩石の弾性波速度については、これまで各種の計算法が提案されてきた。これらの理論的根拠は、弾性波の散乱によるものと、静的弾性論によってクラックを含む物質の弾性エネルギーを求めるものとに大別される。弾性波の散乱は周波数(波長)依存性を持つが、高周波での散乱を扱うのは複雑となるため、散乱にもとづく方法はどれも低周波(長波長)極限での散乱として解を求めている。したがって、両者に本質的差異はない。とくにクラックの大きさが地震波の波長に比べ十分小さければ、静的弾性論の手法による解を弾性波速度計算に用いてもかまわない。

クラックの配向モデルには、クラックがランダムな配置をとる場合と、選択配向を持つ場合とがある。Crampinらが提唱したS波スプリッティングの研究を進めるためには、クラックが選択配向した場合の岩石の弾性定数の計算が必要である。通常、弾性的異方性の計算は単一クラックのモデルから始める。Crampin(1978, 1984)はGarbin and Knopoff(1975)やHudson(1981)の方法を用いてきた。これらはクラックによる弾性波散乱の解から弾性定数を決めるもので、クラックの形態は極端に薄い板状のものを仮定している。いっぽう、静的弾性論によって弾性定数を求める方法の代表的なものにEshelby(1957)によって示された方法がある。Anderson *et al.*(1974)はこれによって弾性定数の計算を行った。この場合はクラックの形態を楕円体で近似し、球から扁平なもので、すべての場合について計算ができる。しかし、

Anderson *et al.*(1974)の用いた方法はクラック密度が小さい場合にしか使うことができない。Nishizawa(1982)はEshelbyの理論を基礎とし、村・森(1976)で示された手法と、Yamamoto *et al.*(1981)が提唱した少量のクラックを含む場合の数値計算の繰り返しとを組み合わせることで、クラック密度が大きい場合にも適用できる弾性定数の数値計算法を示した。Hudson(1981)では弾性定数は簡単な数式で表されており、岩石本来の弾性定数とクラック密度を式に代入するだけで弾性定数が得られる。いっぽう、Nishizawa(1982)ではクラックを含む岩石の弾性定数は、その都度数値計算せねばならず、簡便とは言い難い。しかし、最近のコンピュータの進歩によりこの方法もプログラムさえあれば、即座に結果が得られるようになった。

Douma(1988)はNishizawa(1982)の方法とHudson(1981)の方法とを比較し、クラックが扁平な場合には両者の結果がよく一致することを示すとともに、Hudson(1981)の方法が適用できるクラック密度の限界を見いだした。ところで、Hudson(1981)、Nishizawa(1982)の方法はいずれも、岩石本来の弾性的性質が完全な等方性の場合に限られている。我々は、岩石本来の弾性的異方性についての上述の制限を取り除き、マトリックス物質がいかなる弾性的異方性を持つ場合にも適用できる計算法の研究を始めた。マトリックス物質についての異方性の制限が除かれれば、Yamamoto *et al.*(1981)やNishizawa(1982)と同様の方法が適用できる。まず、ある方向のクラックだけが存在した場合の実効的な弾性定数を計算し、これをマトリックスの弾性定数とすると、このマトリックスは異方性を持つ。ここにさらに別の向きのクラックを導入して次の弾性定数を計算する。こうして、クラックのあらゆる配向に対して弾性定数の数値計算が可能となる。

現在、結果はまだ十分なものではないが、ここでは計算原理の概略と、初期の結果とそれによって提起された問題点のみをとりあえず示すこととし、最終結果は別に報告する予定である。

2. クラックを含む物体の弾性的性質を調べるための基礎的事項について

まず、次のように段階的に問題を設定し、考えていくのがよい(竹内, 1972)。

I. 均質な物質から成る物体を考え、応力を受けているとする。物体のある領域の内部が相転移などによって弾性的性質の異なる物質に変化したり、温度変化などで弾性変形以外の変形をおこした場合を考える。そして、変

化が現れた領域をインクルージョン、その外側をマトリックスと呼ぶ。このとき、全体の弾性エネルギーの変化はどのように表されるか。

この場合、新たに現れたインクルージョンによって物体に変形が生じれば、外部応力はこの変形に応じて仕事をすることになり、物体全体の弾性エネルギーも変化する。もし、物体の変形がなければ、外部応力は新たに仕事をしないが、インクルージョンとマトリックスとに物体の変形を生じないような内部応力の分布を考える必要がある。このため物体全体の弾性エネルギーはやはり変化する。

II. インクルージョンの内部で、上に述べたような相転移または一様な温度変化が生じると、変化前を基準とした変位には、弾性ひずみ以外の変位が含まれることになる。このようなとき、インクルージョンとマトリックスのひずみと応力はどのように表せるか。

この問題を考えるとき eigen ひずみ (Eshelby, 1957 で "stress free strain") と呼ばれるものを導入する。これは「周囲に拘束がない場合、内部に応力を伴わない変形」として定義される。例えば領域内部で相転移が生じたとき、転移を起こした部分を外部に取り出す。そして外部応力のない状態で相転移前後の形の違いを考え、相転移を起こした物質に、相転移前の状態を基準とした変形を考えることができる。あるいは、領域内部だけが一定の温度変化を起こした場合、この部分を取り出してもとの温度に戻すと、物質は熱膨張係数で決まる量の変形を起こす。いずれの場合も取り出された物質内部に弾性的応力は残っていない。これらの変形に対応するひずみを eigen ひずみと呼ぶ。

III. インクルージョンを含む物体が外部から応力を受けた場合、あるいはこれが一定の変形をした場合に、インクルージョンを含まない状態からの応力または変位の乱れを考える。もしインクルージョンをマトリックス物質でおきかえ、これに適当な eigen ひずみを与えてこの乱れ分を表すとすれば、上で述べた応力、変位の乱れ分についてどのような関係式が得られるか。

以上の3つの問題はそれぞれ独立であるが、この3つの問題の解答を組み合わせるにより、インクルージョンを含む物体が外部から応力を受けたときのエネルギー変化を求めることができる。I で得られたエネルギーの変化を、II, IIIの結果を用いてインクルージョンとマトリックスの弾性定数で表すことができれば、インクルージョンを含んだ物体の実効弾性定数を求めることができる。

ここでは I, II, IIIのそれぞれの問題に対する解答のみ

を記す。答の導き方については Eshelby (1957), 竹内 (1972), 村・森 (1976) などに詳しく書かれている。

I は、インクルージョン内部の弾性エネルギーの変化を ΔE_{ei} とし、全体のエネルギーの変化を ΔE_{total} とすると、

$$\Delta E_{ei} = \mp \Delta E_{total} \quad (1)$$

となる (Eshelby, 1957; 竹内, 1972; 村・森, 1976)。 \mp はそれぞれ物体の境界での「表面力一定」, 「変形一定」の条件に対応している。(1) によってインクルージョンの弾性エネルギー変化を計算すれば全体のエネルギー変化もわかるので、エネルギー計算の際にマトリックスのひずみや応力について知る必要はない。マトリックスでのひずみは座標の複雑な関数となることが予想されるので、これは便利な関係である。とくにインクルージョン内部でのひずみが一樣であれば、エネルギー変化の計算ははたって簡単になる。

II, IIIについては楕円体インクルージョンの場合を考える。このとき、インクルージョン内部の eigen ひずみが一樣であればインクルージョン内部のひずみも一樣であり (Eshelby, 1957; 村・森, 1976), インクルージョン内部のひずみ e_{ij} は eigen ひずみを e_{ij}^0 で表せば次のように一次式で表すことができる。ただし、以下では $i, j, k, l=1, 2, 3$ とし、2 回出てきたものについては、1, 2, 3 を代入して和をとることとする。

$$e_{ij} = S_{ijkl} e_{kl}^0 \quad (2)$$

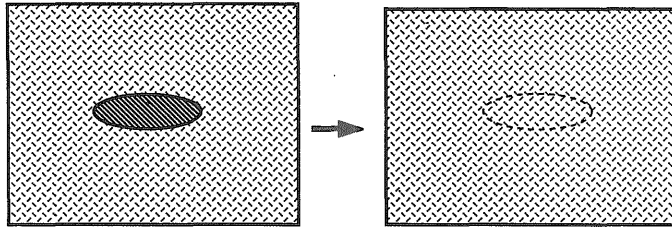
S_{ijkl} は Eshelby のテンソルと呼ばれる。マトリックス部分のひずみと応力についてはこのような簡単な関係を導くことはできない。ここで注意すべきは (2) で示されるひずみ e_{ij} は弾性ひずみ以外のひずみを含んでいることである。

IIIについて次のように考える。まずインクルージョンがないときのマトリックスのひずみ、応力をそれぞれ e_{ij}^0 , σ_{ij}^0 とし、これらがインクルージョンの存在のためにそれぞれ、 e_{ij}^0 , σ_{ij}^0 だけ変化するとし、両者をそれぞれ重ね合わせるにより、実際のひずみ、応力を再現する。ただし、マトリックスとインクルージョンの弾性定数をそれぞれ c_{ijkl}^0 , c_{ijkl} とする。インクルージョンの存在しないとき、

$$\sigma_{ij}^0 = c_{ijkl}^0 e_{kl}^0 \quad (3)$$

となる。インクルージョンが存在するとインクルージョンの内部で、

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^e = c_{ijkl} (e_{kl}^0 + e_{kl}^e) \quad (4)$$



第 1 図 問題IIIでインクルージョンをマトリックス物質で置き換えることを示す図
置き換えられたマトリックス物質に適当な eigen ひずみを与えることにより、インクルージョンが持つひずみと応力が再現できると考える。この条件は式 (5) と (6) で表される。

となる。ここで、第 1 図のようにインクルージョンをマトリックス物質に置き換え、これに適当な eigen ひずみを与えることにより、置き換えられたマトリックス物質に対して e_{ij}^0 に相当するひずみを作ることができないか考えてみる。もし、これができれば II で得られた結果から、

$$e_{ij}^0 = s_{ijkl} e_{kl}^T \quad (5)$$

とすることができる。(4) における e_{ij}^0 はインクルージョンの示す弾性ひずみの一部であるが、(5) では eigen ひずみも含まれている。応力の変化分は、インクルージョンと置き換えたマトリックス物質に対して Hooke の法則を適用して、

$$\sigma_{ij}^0 = c_{ijkl}^0 (e_{kl}^0 - e_{kl}^T) \quad (6)$$

となる。右辺で eigen ひずみが差し引かれているのは、これが内部応力のない状態として定義されているからである。(4), (5), (6) は応力、ひずみの乱れ分 σ_{ij}^0 , e_{ij}^0 と仮想的 eigen ひずみ e_{ij}^T についての独立な関係式である。したがって、 e_{ij}^0 をインクルージョンを含まないときのひずみ e_{ij}^0 で表すことは可能である。まず (6) と (3) を加えて、

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^T = c_{ijkl}^0 (e_{kl}^0 + e_{kl}^T - e_{kl}^T) \quad (7)$$

となる。(4) と (6) より、

$$c_{ijkl}^0 (e_{kl}^0 + e_{kl}^T) = c_{ijkl}^0 (e_{kl}^0 + e_{kl}^T - e_{kl}^T) \quad (8)$$

となる。(8) と (5) より e_{ij}^0 を消去すれば e_{ij}^0 と e_{ij}^T の関係が得られる。こうして e_{ij}^0 を e_{ij}^T で表すことができる。

また、(8) から導かれる重要な結果は (1) の ΔE_{el} が

$$\Delta E_{el} = -(1/2) \Omega \sigma_{ij}^0 e_{ij}^T \quad (9)$$

となることである (上記各文献参照)。ここで Ω はインクルージョンの体積である。

応力 σ_{ij}^0 を受けたとき、インクルージョンを含む物体の現実のひずみは複雑であるが、我々は (1) と (9) から物体

のエネルギー変化を簡単に計算できる。そこで、加えられる応力に対して等価なエネルギー変化を与える弾性定数を求め、これを実効 (effective) 弾性定数と定義し、 c_{ijkl}^* で表す。 σ_{ij}^0 を一定と考えたとき、インクルージョンを含む状態での全体の弾性エネルギーの変化はインクルージョンを含まないときの値に (1) で求められた ΔE_{total} を加えたものである。(9) を利用して単位体積あたりのエネルギーは次式で表される。

$$\frac{1}{2} s_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 = \frac{1}{2} s_{ijkl}^0 \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 + \frac{1}{2} v \sigma_{ij}^0 e_{ij}^T \quad (10)$$

s_{ijkl}^* , s_{ijkl}^0 はそれぞれ実効弾性定数 c_{ijkl}^* およびインクルージョンを含まない状態の弾性定数 c_{ijkl}^0 の逆行列 (弾性コンプライアンス) であり、 v はインクルージョンの体積比率である。 e_{ij}^T は (8), (5) より e_{ij}^0 , c_{ijkl}^0 , c_{ijkl}^* で表すことができるので、(10) の右辺第 2 項は、 $e_{ij}^0 = s_{ijkl}^0 \sigma_{kl}^0$ より、 σ_{ij}^0 の関数 $f(\sigma_{ij}^0)$ で書くことができる。

$$\frac{1}{2} s_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 = \frac{1}{2} s_{ijkl}^0 \sigma_{kl}^0 \sigma_{ij}^0 + \frac{1}{2} v f(\sigma_{ij}^0) \quad (11-1)$$

(11-1) が恒等的に成り立つという条件から

s_{ijkl}^* を s_{ijkl}^0 , s_{ijkl}^* , (または c_{ijkl}^*), v で表すことができ、 $c_{ijkl}^* = s_{ijkl}^{* -1}$ (逆行列の関係) より実効弾性定数を求めることができる。(1) で示したように全体の弾性エネルギーの変化をインクルージョン内部の弾性エネルギー変化で表した場合、物体周囲での「表面力一定」, 「変位一定」のそれぞれの条件で符号が逆になる。

(11-1) は物体周囲の表面力が一定の条件に対応するが、物体周囲のひずみ一定の条件に対応するのは、

$$\frac{1}{2} c_{ijkl}^* e_{ij}^0 e_{kl}^0 = \frac{1}{2} c_{ijkl}^0 e_{ij}^0 e_{kl}^0 - \frac{1}{2} v f(e_{ij}^0) \quad (11-2)$$

である。

以上は Eshelby (1957) によって解決された問題である。Eshelby (1957) では等方性マトリックス物質が楕円体のインクルージョンを含む場合について Eshelby テンソルの実際の計算例を示している。しかし、この方法は

マトリックスを等方性物質に限定しているわけではない。村・森 (1976) で指摘されているように、異方性物質でも Eshelby テンソルは計算できるし、ここに楕円体インクルージョンが含まれたときの実効弾性定数も計算できる。そこで次に Eshelby テンソルの一般的な求め方について考える。

3. 異方性マトリックスの場合の実効的弾性定数の求め方

まず変位やひずみをフーリエ変換で表すことを考える。ただし、変形は静的なものに限り、時間項は考慮しない。したがって運動方程式には時間についての 2 次微分の項は現れない。次に (2) に現れた Eshelby のテンソルがどのように書き表されるかを考える。

\mathbf{x} を空間の座標ベクトル、 $\boldsymbol{\xi}$ を波数ベクトルとして、変位の各成分をフーリエ逆変換を用いて次のように表す。

$$u_m(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_m(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \quad (12)$$

ただし、 $\bar{u}_m(\boldsymbol{\xi})$ は $u_m(\mathbf{x})$ のフーリエ変換

$$\bar{u}_m(\boldsymbol{\xi}) = (1/2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} u_m(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} \quad (13)$$

である。以下、座標系の x_n 成分に関する偏微分をサフィックスの n で表す。変位勾配は

$$u_{m,n}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} i\xi_n \bar{u}_m(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \quad (14)$$

となる。eigen ひずみ e_{mn}^T に対しても、対応する変位勾配によって同じように定義することができる。

$$e_{mn}^T(\mathbf{x}) = (1/2) (u_{m,n}^T + u_{n,m}^T) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{e}_{mn}^T(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \quad (15)$$

ただし、 \bar{e}_{mn}^T は e_{mn}^T のフーリエ変換である。

物体が前節で考えたような内部応力状態にあるときは、全ひずみから eigen ひずみを引いたものが真の弾性ひずみであるので、応力は次のようになる。

$$\sigma_{pq}(\mathbf{x}) = C_{pqmn} [e_{mn}(\mathbf{x}) - e_{mn}^T(\mathbf{x})] \\ = C_{pqmn} [(1/2) \{u_{m,n}(\mathbf{x}) + u_{n,m}(\mathbf{x})\} - e_{mn}^T(\mathbf{x})]$$

係数の対称性 $C_{pqmn} = C_{pqnm}$ を利用して、

$$\sigma_{pq}(\mathbf{x}) = C_{pqmn} [u_{m,n}(\mathbf{x}) - e_{mn}^T(\mathbf{x})] \\ = C_{pqmn} \int_{-\infty}^{\infty} [i\xi_n \bar{u}_m(\boldsymbol{\xi}) - \bar{e}_{mn}^T(\boldsymbol{\xi})]$$

$$\times \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \quad (16)$$

物体は静的つりあいの状態にあるので

$$\sigma_{pq,q}(\mathbf{x}) = 0$$

より、(16) を q について偏微分して、

$$C_{pqmn} \int_{-\infty}^{\infty} [-\xi_n \xi_q \bar{u}_m(\boldsymbol{\xi}) - i\xi_q \bar{e}_{mn}^T(\boldsymbol{\xi})] \\ \times \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} = 0 \quad (17)$$

となる。これが恒等的に成り立つためには

$$C_{pqmn} [\xi_n \xi_q \bar{u}_m(\boldsymbol{\xi}) + i\xi_q \bar{e}_{mn}^T(\boldsymbol{\xi})] = 0 \quad (18)$$

ここで、

$$K_{pm} = C_{pqmn} \xi_n \xi_q \quad (19-1)$$

$$\bar{e}_p^T = -i C_{pqmn} \xi_q \bar{e}_{mn}^T(\boldsymbol{\xi}) \quad (19-2)$$

とすると、(18) は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} K_{11} \bar{u}_1 + K_{12} \bar{u}_2 + K_{13} \bar{u}_3 &= \bar{e}_1^T \\ K_{21} \bar{u}_1 + K_{22} \bar{u}_2 + K_{23} \bar{u}_3 &= \bar{e}_2^T \\ K_{31} \bar{u}_1 + K_{32} \bar{u}_2 + K_{33} \bar{u}_3 &= \bar{e}_3^T \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = 1/|K_{ij}|$ (行列式の値の逆数)、とすると、

$$\bar{u}_m(\boldsymbol{\xi}) = \bar{e}_k^T N_{km}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \quad (21)$$

となる。なお $N_{km}(\boldsymbol{\xi})$ は行列 K_{ij} の K_{km} に対する余因子、すなわち、

$$(-1)^{k+m} \times [K_{ij} \text{ より } k \text{ 行 } m \text{ 列を除いた行列式}]$$

である。こうして $u_m(\mathbf{x})$ のフーリエ変換の具体的な形を求めることができた。これは eigen ひずみのフーリエ変換と弾性定数および波数成分によって表される。

次に、Eshelby テンソルが一般的にどのように表されるか調べる。(21) のフーリエ逆変換と (19-2) より

$$u_m(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{e}_k^T N_{km}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \\ = -i \int_{-\infty}^{\infty} C_{klij} \xi_i \bar{e}_j^T(\boldsymbol{\xi}) N_{km}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \\ \times \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \quad (22)$$

ここで $G_{km}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ を次のように定義する。

$$G_{km}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = (1/2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} N_{km}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi})$$

$$\times \exp[i\bar{\xi} \cdot (x-x')] d\bar{\xi} \quad (23)$$

また,

$$G_{km,l}(x-x') = (1/2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} i\bar{\xi}_l N_{km}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) \times \exp[i\bar{\xi} \cdot (x-x')] d\bar{\xi} \quad (24)$$

である。さらに、(22) の被積分関数の中の $\bar{e}_{ij}^T(\bar{\xi})$ をフーリエ変換で書き直すと

$$u_m(x) = -i(1/2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_{klij} \bar{\xi}_l N_{km}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) \times e_{ij}^T(x') \exp[i\bar{\xi} \cdot (x-x')] dx' d\bar{\xi} \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} c_{klij} e_{ij}^T(x') G_{km,l}(x-x') dx' \quad (25)$$

となる。これは点 x での変位の m 成分を x' における eigen ひずみ $e_{ij}^T(x')$ によって示したものである。

ところで $G_{km}(x-x')$ は、実は弾性論における静的グリーン関数を表しており、点 x' に x_m 方向の単位の力が加わったときの点 x における変位の x_k 成分を示す。したがって、(23) は異方性物質でも成り立つ静的グリーン関数の一般的表現を示している。(23) から等方性物質の静的グリーン関数を具体的に導く計算は村・森 (1976) に示されている。

ここで、次式

$$(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 + (x_3/a_3)^2 \leq 1 \quad (26)$$

で表される楕円体内部に、マトリックスとは別の物質が存在する楕円体インクルージョンの問題を考える。eigen ひずみを均一とすると、 $e_{ij}^T(x')$ は (25) の積分の外に出る。eigen ひずみの存在する楕円体インクルージョンの内部を Ω で表せば、 x' での積分は Ω の中に限られるので、(25) は

$$u_m(x) = -e_{ij}^T \int_{\Omega} c_{klij} G_{km,l}(x-x') dx' \quad (27)$$

となる。eigen ひずみに起因するひずみは、

$$e_{mn}(x) = -e_{ij}^T \int_{\Omega} c_{klij} (1/2) [G_{km,ln}(x-x') + G_{kn,lm}(x-x')] dx' \quad (28)$$

となる。ここで前節で考えたと同じように、インクルージョン内部をマトリックス物質で置き換え、応力、ひずみの等価な乱れを求める問題の場合には、 $N_{km}(\bar{\xi})$ と $D^{-1}(\bar{\xi})$ の中に現れる弾性定数はマトリックス物質の弾性定数 c_{ijkl}^0 となる。(28) の $e_{mn}(x)$ は eigen ひずみが均一であれば、楕円体内部で均一である。またこのとき、(28) の

e_{mn} は e_{mn}^c であり、これを (5) と比較すると (28) の被積分項で $c_{ijkl} = c_{ijkl}^0$ として Eshelby のテンソルを得ることができる。

村・森 (1976) は楕円体インクルージョンの問題では (25) は次のような単位球面上の積分に書き直せることを示した。

$$u_i(x) = (a_1 a_2 a_3 / 4\pi) e_{mn}^T \int_S (\bar{x} \cdot \bar{\xi}) \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k \zeta^{-3} c_{jlmn}^0 \times N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \quad (29)$$

ただし、 $\bar{\xi}$ は単位ベクトルである。また、 ζ は

$$\zeta = (a_1^2 \bar{\xi}_1^2 + a_2^2 \bar{\xi}_2^2 + a_3^2 \bar{\xi}_3^2)^{1/2} \quad (30)$$

である。

$$u_{i,k}(x) = (a_1 a_2 a_3 / 4\pi) e_{mn}^T \int_S \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l \zeta^{-3} c_{jlmn}^0 \times N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \quad (31)$$

より、

$$e_{ik}^c = (u_{i,k} + u_{k,i}) / 2 \\ = (1/8\pi) (c_{jlmn}^0 \bar{G}_{ijkl} + c_{jlmn}^0 \bar{G}_{kjil}) e_{mn}^T \quad (32)$$

ここで \bar{G}_{ijkl} は次式で与えられる。

$$\bar{G}_{ijkl} = (a_1 a_2 a_3) \int_S \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l \zeta^{-3} \times N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \quad (33)$$

これにより、Eshelby のテンソルは

$$S_{ikmn} = (1/8\pi) (c_{jlmn}^0 \bar{G}_{ijkl} + c_{jlmn}^0 \bar{G}_{kjil}) \quad (34)$$

となる。つまり、(33) の積分が計算できれば Eshelby のテンソルの具体的な数値が得られる。

マトリックスが等方性物質の場合、(34) は解析的に表現できて、Eshelby (1957) の結果と一致すること、また立方晶、六方晶の場合に、回転楕円体の軸が晶系の主軸と一致するときは有理関数の定積分となることなどが村・森 (1976) に示されている。しかしマトリックスの対称性が低い場合や、楕円体インクルージョンの主軸が晶系の主軸と一致しないときには、解を簡単に書き表すことはできない。そこで我々は直接計算によって (34) を数値的に求めることを試みた。

4. Eshelby テンソルと実効弾性定数の計算例

ここでは、(33) の積分の値を求めるために、最も簡単

$$\times \exp[i\bar{\xi} \cdot (x-x')] d\bar{\xi} \quad (23)$$

また,

$$G_{km,l}(x-x') = (1/2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} i\bar{\xi}_l N_{km}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) \times \exp[i\bar{\xi} \cdot (x-x')] d\bar{\xi} \quad (24)$$

である。さらに、(22) の被積分関数の中での $\bar{e}_{ij}^T(\bar{\xi})$ をフーリエ変換で書き直す

$$u_m(x) = -i(1/2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_{klij} \bar{\xi}_l N_{km}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) \times e_{ij}^T(x') \exp[i\bar{\xi} \cdot (x-x')] dx' d\bar{\xi} \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} c_{klij} e_{ij}^T(x') G_{km,l}(x-x') dx' \quad (25)$$

となる。これは点 x での変位の m 成分を x' における eigen ひずみ $e_{ij}^T(x')$ によって示したものである。

ところで $G_{km}(x-x')$ は、実は弾性論における静的グリーン関数を表しており、点 x' に x_m 方向の単位の力が加わったときの点 x における変位の x_k 成分を示す。したがって、(23) は異方性物質でも成り立つ静的グリーン関数の一般的表現を示している。(23) から等方性物質の静的グリーン関数を具体的に導く計算は村・森 (1976) に示されている。

ここで、次式

$$(x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 + (x_3/a_3)^2 \leq 1 \quad (26)$$

で表される楕円体内部に、マトリックスとは別の物質が存在する楕円体インクルージョンの問題を考える。eigen ひずみを均一とすると、 $e_{ij}^T(x')$ は (25) の積分の外に出る。eigen ひずみの存在する楕円体インクルージョンの内部を Ω で表せば、 x' での積分は Ω の中に限られるので、(25) は

$$u_m(x) = -e_{ij}^T \int_{\Omega} c_{klij} G_{km,l}(x-x') dx' \quad (27)$$

となる。eigen ひずみに起因するひずみは、

$$e_{mn}(x) = -e_{ij}^T \int_{\Omega} c_{klij} (1/2) [G_{km,ln}(x-x') + G_{kn,lm}(x-x')] dx' \quad (28)$$

となる。ここで前節で考えたと同じように、インクルージョン内部をマトリックス物質で置き換え、応力、ひずみの等価な乱れを求める問題の場合には、 $N_{km}(\bar{\xi})$ と $D^{-1}(\bar{\xi})$ の中に現れる弾性定数はマトリックス物質の弾性定数 c_{ijkl}^0 となる。(28) の $e_{mn}(x)$ は eigen ひずみが均一であれば、楕円体内部で均一である。またこのとき、(28) の

e_{mn} は e_{mn}^c であり、これを (5) と比較すると (28) の被積分項で $c_{ijkl} = c_{ijkl}^0$ として Eshelby のテンソルを得ることができる。

村・森 (1976) は楕円体インクルージョンの問題では (25) は次のような単位球面上の積分に書き直せることを示した。

$$u_i(x) = (a_1 a_2 a_3 / 4\pi) e_{mn}^T \int_S (\bar{x} \cdot \bar{\xi}) \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k \zeta^{-3} c_{jlmn}^0 \times N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \quad (29)$$

ただし、 $\bar{\xi}$ は単位ベクトルである。また、 ζ は

$$\zeta = (a_1^2 \bar{\xi}_1^2 + a_2^2 \bar{\xi}_2^2 + a_3^2 \bar{\xi}_3^2)^{1/2} \quad (30)$$

である。

$$u_{i,k}(x) = (a_1 a_2 a_3 / 4\pi) e_{mn}^T \int_S \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l \zeta^{-3} c_{jlmn}^0 \times N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \quad (31)$$

より、

$$e_{ik}^c = (u_{i,k} + u_{k,i}) / 2 \\ = (1/8\pi) (c_{jlmn}^0 \bar{G}_{ijkl} + c_{jlmn}^0 \bar{G}_{kjil}) e_{mn}^T \quad (32)$$

ここで \bar{G}_{ijkl} は次式で与えられる。

$$\bar{G}_{ijkl} = (a_1 a_2 a_3) \int_S \bar{\xi}_i \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l \zeta^{-3} \times N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \quad (33)$$

これにより、Eshelby のテンソルは

$$S_{ikmn} = (1/8\pi) (c_{jlmn}^0 \bar{G}_{ijkl} + c_{jlmn}^0 \bar{G}_{kjil}) \quad (34)$$

となる。つまり、(33) の積分が計算できれば Eshelby のテンソルの具体的な数値が得られる。

マトリックスが等方性物質の場合、(34) は解析的に表現できて、Eshelby (1957) の結果と一致すること、また立方晶、六方晶の場合に、回転楕円体の軸が晶系の主軸と一致するときは有理関数の定積分となることなどが村・森 (1976) に示されている。しかしマトリックスの対称性が低い場合や、楕円体インクルージョンの主軸が晶系の主軸と一致しないときには、解を簡単に書き表すことはできない。そこで我々は直接計算によって (34) を数値的に求めることを試みた。

4. Eshelby テンソルと実効弾性定数の計算例

ここでは、(33) の積分の値を求めるために、最も簡単

第1表 等方性物質についての, Eshelby
テンソル計算結果の比較

S_{ijk}	解析解	数値解	標準偏差%
a. アスペクト比 1.00			
1111	0.511111	0.511208	0.076
1122	0.022222	0.022200	0.733
1133	0.022222	0.022217	0.863
3311	0.022222	0.022237	0.682
3333	0.511111	0.511249	0.106
2323	0.244444	0.244492	0.069
1212	0.244444	0.244342	0.087
b. アスペクト比 0.10			
1111	0.123600	0.123596	0.142
1122	0.010268	0.010258	0.691
1133	-0.017871	-0.017909	0.785
3311	0.245864	0.245430	0.646
3333	0.942945	0.941778	0.515
2323	0.424310	0.423736	0.533
1212	0.056666	0.056686	0.071
c. アスペクト比 0.05			
1111	0.066553	0.066566	0.118
1122	0.005780	0.005784	0.612
1133	-0.010817	-0.010808	0.630
3311	0.285607	0.284713	0.930
3333	0.972422	0.969720	0.980
2323	0.458425	0.457987	0.842
1212	0.030386	0.030400	0.073
d. アスペクト比 0.01			
1111	0.014169	0.014176	0.236
1122	0.001276	0.001279	1.020
1133	-0.002520	-0.002516	0.906
3311	0.323058	0.325213	3.368
3333	0.994700	1.001158	6.236
2323	0.491017	0.498961	3.644
1212	0.006446	0.006445	0.118

解析解の値は Eshelby (1957) または村・森 (1976) より計算することができる。数値計算における球面上の一般的な乱数の発生個数は、1回の計算で1,000,000個である。

このような計算を10回繰り返して平均したものが、数値解として示されている。数値解のばらつきは標準偏差 (%) で示されている。

なモンテカルロ法を用いた。乱数によって単位球面上にランダム点を発生させ、(33) の被積分関数の値を求め、最後に平均を求めて積分値とする。

まず、計算精度を確かめるため、等方性物質をマトリックスとして Eshelby テンソルと実効弾性定数の計算を行った。次に、異方性を持ったマトリックスについて同様の計算を行った。計算にはサンマイクロシステムズのワークステーション、SUN SPARC STATION 1+ をおもに用いた。以下に述べる乱数発生による Eshelby テンソルの計算1回に要した時間は、上記機種の場合約8時間程度である。

第2表 弾性定数の値 (GPa)

c_{ij}	荷重一定条件 (11-1)			変位一定条件 (11-2)		
	解析解	数値解	差%	解析解	数値解	差%
アスペクト比 1.00						
11	112.54	112.53	<0.01	112.39	112.44	0.03
33	112.54	112.53	<0.01	112.39	112.44	0.03
12	37.31	37.31	0.00	37.38	37.38	0.00
13	37.31	37.31	0.00	37.38	37.38	0.00
44	37.47	37.47	0.00	37.53	37.53	0.00
66	37.47	37.47	0.00	37.53	37.53	0.00
アスペクト比 0.10						
11	112.74	112.77	0.03	112.25	112.29	0.04
33	94.98	95.22	0.25	89.85	90.22	0.41
12	36.46	36.49	0.08	36.01	36.05	0.11
13	32.47	32.54	0.22	30.98	31.09	0.36
44	34.46	34.80	0.06	33.86	33.89	0.09
66	38.14	38.14	0.00	38.12	38.12	0.00
アスペクト比 0.05						
11	111.81	111.91	<0.09	110.63	110.63	0.18
33	84.98	86.11	1.33	72.89	75.02	0.18
12	35.43	35.54	0.31	34.29	34.49	0.58
13	29.16	29.51	1.11	25.47	26.13	2.59
44	31.44	31.50	0.19	29.62	29.72	0.34
66	38.19	38.19	0.00	38.17	38.17	0.00

第1表で求められた数値解の結果を用いて計算した弾性定数。

弾性定数の計算は、荷重一定条件と変位一定条件のふたつの条件でそれぞれ行われる。荷重一定、変位一定の各条件はそれぞれ、(11-1)、(11-2) に対応する。解析解と今回の数値解の差が%で示されている。アスペクト比の値が小さくなると、すなわち形状がより扁平な回転楕円体になると、解の精度が落ちる。

なお、弾性定数は Voigt の記号で表されており、 c_{ijk} と c_{pq} とで次の置き換え、 $ij, kl \rightarrow p, q$ を行う。11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 31→5, 12→6。

4.1 等方性マトリックスに対する Eshelby テンソルと実効弾性定数

第1表 a-d は乱数が 10^6 個のときの Eshelby テンソルの値である。計算はそれぞれについて10回行われ、各計算値から平均と標準偏差を求めた。標準偏差が小さければ解のばらつきは少なく、計算結果は信頼できるものと見なせる。クラックの形状は扁平な回転楕円体を仮定することが多いので、計算は扁平な回転楕円体のインクルージョンについて行った。形状を示すパラメタとして、楕円体の短軸と長軸の比で定義されるアスペクト比 α を用いる。また、回転楕円体の回転軸は x_3 軸方向として Eshelby テンソルを定義する。インクルージョンの形状が球であるときは、Eshelby テンソルの独立な成分は3つしかない。マトリックスが等方的であるときは、Eshelby テンソルの値は解析的に計算できる。第1表では解析解とモンテカルロ法による解を示している。モンテカルロ法では、インクルージョンの形状が球のときに解は精度よ

く求められるが、 α の値が小さく、即ち偏平の度合が大きくなるにつれ解の精度が悪くなる。

モンテカルロ法で求められた Eshelby テンソルを用いて、前節で述べた方法によりクラックを含んだ物質の弾性定数を計算することができる。これを示したのが第 2 表である。マトリックスの弾性定数 (ラメ定数) は $\lambda^0 = \mu^0 = 39 \text{ GPa}$ 、インクルージョンとしてクラック内部に水が含まれる場合を考え、 $\lambda' = 2.2 \text{ GPa}$ 、 $\mu' = 0$ とした。表に示されたのは孔隙率が 2% の場合である。ただし、アスペクト比 0.01 の場合については Eshelby テンソルの値の精度が低いので、弾性定数を計算することができなかった。

4.2 異方性マトリックスに対する Eshelby テンソルと実効弾性定数

次に、異方性マトリックスに対する Eshelby テンソルの値を求めた。今回計算に用いたモンテカルロ法では、インクルージョンの形状が球に近い場合にしか Eshelby テンソルの値が精度よく求められない。したがって、この場合についてのみ計算を行った。

異方性物質の具体例として Sumino *et al.* (1977) による Forsterite のデータを用いた。Forsterite は olivine (かんらん石) のエンドメンバーでのひとつで、化学式で表すと Mg_2SiO_4 、対称の系は斜方晶系 (orthorhombic) で、独立な弾性定数の数は 9 個である。第 3 表 a は Eshelby テンソルの値を示す。ここでは全部で 12 個の独立な値が現れる。計算は等方性物質の場合と同様に 1,000,000 回の乱数発生による計算を 10 回行い、その平均を計算した。第 3 表 b, c ではテンソル各成分の計算値の標準偏差および相対標準偏差 (%) で、結果の精度を示している。テンソル成分の絶対値が小さいものほど精度が低くなっている。第 4 表は Forsterite の結晶中に球形のクラックが存在し、中に空気が含まれたときの弾性定数である。A は Sumino *et al.* (1977) の結晶の弾性定数の値、B, C はそれぞれ、条件 (11-1)、(11-2) で求めた値である。

5. 議論とまとめ

ここではクラックを含む物質が弾性的異方性を持つ場合に、その実効弾性定数を計算する一般的な方法を示した。これまでの方法では、Eshelby テンソルは次のような限られた場合のみ得られている。1. マトリックス物質が等方性の場合、2. マトリックスが立方または六方のいずれかの対称性を持ち、かつ偏平な回転楕円体で近似されたクラックの回転軸の方向がマトリックスの対称軸と一致す

第 3 表-a Forsterite (かんらん石) の S_{ijkl} (Eshelby テンソルの値)

$i, j \backslash k, l$	11	22	33	23	31	12
11	0.55556	0.00427	0.00034			
22	-0.00164	0.49428	0.03165			
33	-0.00117	0.03299	0.51760			
23				0.22906		
31					0.24182	
12						0.24546

第 3 表-b S_{ijkl} の標準偏差

$i, j \backslash k, l$	11	22	33	23	31	12
11	0.00046	0.00104	0.00037			
22	0.00140	0.00029	0.00035			
33	0.00052	0.00041	0.00052			
23				0.00018		
31					0.00020	
12						0.00020

第 3 表-c S_{ijkl} の相対標準偏差%

$i, j \backslash k, l$	11	22	33	23	31	12
11	0.08	24.32	111.12			
22	85.39	0.06	1.10			
33	44.70	1.26	0.10			
23				0.07		
31					0.11	
12						0.08

第 4 表 Forsterite の結晶の弾性定数と 1% の形状の空隙が含まれたときの弾性定数 c_{ij}

	11	22	33	23	31	12	44	55	66
A	327.3	200.4	235.4	73.2	69.1	67.3	67.0	81.2	80.7
B	320.1	196.4	230.5	71.5	67.6	65.8	65.8	79.7	79.1
C	319.9	196.3	230.4	71.4	67.6	65.8	65.8	79.6	79.1

但し Vogit の表記による。単位は GPa。

A は Sumino *et al.* による Forsterite 結晶の弾性定数。

B, C は球形のクラック (ポイド) を 1% 含んだ場合の弾性定数で、それぞれ式 (11-1)、(11-2) の条件で求めた値。

る場合。したがって、クラックを含む物質の弾性定数は限られた場合しか計算できない。ここで示した方法では、マトリックス物質が一般的な異方性を持つ場合にも実効弾性定数の計算が可能である。しかし、これまでの計算ではクラックの形状が球に近い場合 (偏平な回転楕円体でクラックを近似したときのアスペクト比が 1 に近い場合) だけしか、信頼できる解を得ることができない。これはここで用いた数値積分の方法が、インクルージョンの形状が球に近い場合にしか適用できないことを示している。アスペクト比が小さなクラックの場合は、回転楕円体の短軸方向に変位勾配が大きくなるのが直感的に想像できる。これは、積分計算の際に ξ_3 方向では、他の方向よりもさらに高周波成分まで考慮しなければならないこと

を意味している。球面上に一様に乱数を発生させたのでは、特定方向について高周波成分での計算精度を上げることはできない。計算精度を上げるためには、(22)に戻って曲線座標系による表現式に書き換えて積分を行うなどの方法を検討する必要がある。

マトリックスが一般的な対称性を持つ場合での Eshelby テンソルの計算が必要な理由は、この方法によって結晶中の孔隙による弾性定数の計算が可能ということだけではない。偏平なクラックが存在するとき、この物質全体の対称性は六方晶を示すが、ここに任意の方向のクラックをさらに加え、Yamamoto *et al.* (1981) で示された繰り返し数値計算の方法を適用しようとするれば、クラックの向きが任意の方向を持つ場合の実効弾性定数の計算が必要となるからである。この場合、次の段階で仮想的にマトリックスと考えたものと、新たに導入するクラックの対称軸とが一致しなければ、従来の計算法は適用できない。これに対して、ここで示した方法ではマトリックスの対称性を問わないので、クラックがどのような配向をしていても、Yamamoto *et al.* (1981) で示された方法によって新たにクラックを導入し、新しい実効弾性定数を求めることができる。しかし現在の計算法では、クラック形状が球に近い場合しか、満足な精度で Eshelby テンソルを求めることができないため、まだ一般的な問題に適用することはできない。今後は高い精度を与える数値計算法を探る必要がある。

謝辞 この研究はサンシャイン特別研究「地熱探査技術等検証調査に伴うデータの解析・評価」における、小項目「弾性波利用探査解析・評価—岩石物性測定・モデル実験」の成果の一部である。筑波大学平田隆幸氏には数値計算についての助言と指導を、東北大学理学部佐藤春夫、地殻熱部杉原光彦、地殻物理部桑原保人および環境地質部増田幸治の各氏には内容についてのコメントを頂いた。

文 献

- Anderson, D. L., Minster, B. and Cole, D. (1974) The effect of oriented cracks on seismic velocities, *J. Geophys. Res.*, vol. 10, p. 4011-4015.
- Crampin, S. (1978) Seismic wave propagation through a cracked solid: Polarization as a possible dilatancy diagnostic. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, vol. 53, p. 467-496.
- and Mcgonigle, R. (1981) The variation of delays in stress-induced anisotropic polarization anomalies. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, vol. 64, p. 115-131.
- (1984) Effective anisotropic elastic constants for wave propagation through cracked solids. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, vol. 76, p. 135-145.
- and Atkinson, B. K. (1985) Microcracks in the Earth's crust. *First Break*, vol. 3, p. 16-20.
- (1987) Geological and industrial implications of extensive-dilatancy anisotropy. *Nature*, vol. 328, p. 491-496.
- (1991) Wave propagation through fluid-filled inclusions of various shapes: interpretation of extensive-dilatancy anisotropy. *Geophys. J. Int.*, vol. 104, p. 611-623.
- Douma, J. (1988) The effect of the aspect ratio on crack-induced anisotropy. *Geophys. Prospect.*, vol. 36, p. 614-632.
- and Crampin, S. (1990) The effect of a changing aspect ratio of aligned cracks on shear wave vertical seismic profiles: A theoretical study. *J. Geophys. Res.*, vol. 95, p. 11293-11300.
- Eshelby, J. D. (1957) The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. Roy. Soc., ser. A*, vol. 241, p. 376-396.
- Garbin, H. D. and Knopoff, L. (1975) Elastic Moduli of a medium with liquid-filled cracks. *Quart. Appl. Math.*, vol. 33, p. 301-303.
- Gupta, I. N. (1973) Premonitory variations in S-wave velocity anisotropy before earthquakes in Nevada. *Science*, vol. 182, p. 1129-1132.
- Hudson, J. A. (1981) Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, vol. 64, p. 133-150.
- Leary, P. C., Crampin, S. and McEvelly, T. V. (1990) Seismic fracture anisotropy in the Earth's crust: an overview. *J. Geophys.*

- Res.*, vol. 95, p. 11105-11114.
- Li, Y. G., Leary, P. C. and Aki, K. (1990) Heterogeneous anisotropic crystalline rock: Borehole vertical seismic profiling seismograms from the Mojave desert, California. *J. Geophys. Res.*, vol. 95, p. 11225-11240.
- 村外志夫, 森勉(1976) マイクロメカニクス—転移と介在物—. 培風館, 東京, p. 197.
- Nishizawa, O. (1982) Seismic velocity anisotropy in a medium containing oriented cracks—Transversely isotropic case—. *J. Phys. Earth*, vol. 30, p. 331-347.
- Sumino, Y., Nishizawa, O., Goto, T., Ohno, I. and Ozima, M. (1977) Temperature variation of elastic constants of single-crystal forsterite between -190° and 400°C . *J. Phys. Earth*, vol. 25, p. 377-392.
- 竹内均(1972) 地球科学における諸問題. 裳華房, 東京, p. 373.
- Yamamoto, K., Kosuga, M. and Hirasawa, T. (1981) A theoretical method for determination of effective elastic constants of isotropic composite. *Sci. Rep. Tohoku Univ., ser. 5 (Tohoku Geophys. J.)*, vol. 28, p. 47-67.

(受付: 1991年7月4日; 受理 1991年7月31日)